

Ion Bucur Popescu

MATEMATICĂ

M1

Subiecte rezolvate
BAC 2020

- **Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică**
- **Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică**

Varianta 1

1. Să se determine numărul natural x din egalitatea $1+5+9+\dots+x=231$.
2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $2x^2-5x+3\leq 0$.
3. Să se determine inversa funcției bijective $f:(0,\infty)\rightarrow(1,\infty)$, $f(x)=x^2+1$.
4. Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,\dots,10\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A , care conțin elementul 1.
5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât distanța dintre punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$ să fie 4.
6. Să se calculeze $\cos\frac{23\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

Rezolvări

1. Termenii sumei aparțin unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu primul termen $a_1=1$ și rația $r=a_2-a_1=5-1=4$. Avem $a_n=a_1+(n-1)\cdot r=1+(n-1)\cdot 4=4n-3$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, de unde deducem că $S_n=a_1+a_2+\dots+a_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}=\frac{(1+4n-3)\cdot n}{2}=(2n-1)\cdot n=2n^2-n$, pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Pentru $S_n=2n^2-n=231$, obținem ecuația de gradul al II-lea $2n^2-n-231=0$, cu $a=2$, $b=-1$, $c=-231$, $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-231)=1849=43^2$, deci $n_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm 43}{4}$, $n_1=\frac{1-43}{4}=-\frac{21}{2}\notin\mathbb{N}$, $n_2=\frac{1+43}{4}=11\in\mathbb{N}$, deci $n=11\Rightarrow x=a_n=a_{11}=4\cdot 11-3=41$, adică $x=41$.
2. Avem o inecuație de gradul al II-lea cu $a=2$, $b=-5$, $c=3$, $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=1$, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5\pm 1}{4}$, $x_1=\frac{5-1}{4}=1$, $x_2=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}$.
Din relațiile $a=2>0$, $x_1=1$ și $x_2=\frac{3}{2}$, deducem că $2x^2-5x+3\leq 0\Leftrightarrow x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$.
3. Pentru $x\in(0,\infty)$ și $y\in(1,\infty)$, avem $x^2+1=y\Leftrightarrow x^2=y-1\Leftrightarrow x=\sqrt{y-1}$, deci $f^{-1}(y)=x=\sqrt{y-1}$ sau, notând variabila tot cu x , avem $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$, $f^{-1}:(1,\infty)\rightarrow(0,\infty)$.
4. Fie $A'=A-\{1\}$ submulțimea elementelor diferite de elementul 1. Evident $|A|=10$ și $|A'|=9$. Mulțimea A admite C_{10}^3 submulțimi de trei elemente, dintre care C_9^3 sunt și submulțimile lui $A'\subset A$, submulțimi care nu conțin elementul 1, deci rămân $C_{10}^3-C_9^3=C_9^2=\frac{8\cdot 9}{2}=36$ de submulțimi cu trei elemente care conțin elementul 1.

5. Avem $AB = \sqrt{(2-m)^2 + [m - (-2)]^2} = \sqrt{(2-m)^2 + (m+2)^2} = \sqrt{2m^2 + 8}$, deci $AB = 4 \Leftrightarrow \sqrt{2m^2 + 8} = 4 \Leftrightarrow 2m^2 + 8 = 4^2 = 16 \Leftrightarrow 2m^2 = 16 - 8 = 8 \Leftrightarrow m^2 = \frac{8}{2} = 4 \Leftrightarrow m_{1,2} = \pm 2$, deci $m \in \{-2, 2\} \subset \mathbb{R}$.

6. $\cos \frac{23\pi}{12} = \cos \frac{(24-1)\pi}{12} = \cos \left(\frac{24\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right) = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{12} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{12} \right)$, unde am folosit periodicitatea și paritatea funcției cosinus.

Atunci $\cos \frac{23\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Varianta 2

1. Să se arate că numărul $(1-i)^{24}$ este real.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{3x-1}{x+1} + \frac{x+1}{2x-1} = 3$.

3. Să se determine inversa funcției bijective $f: \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty)$, $f(x) = e^x + 1$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr \overline{ab} din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a \neq b$.

5. Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC, unde $A(-2, -1)$, $B(2, 0)$, $C(0, 6)$.

6. Fie vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = (m-2)\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine $m > 0$ astfel încât vectorii \vec{u} și \vec{v} să fie perpendiculari.

Rezolvări

1. Avem $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i \Rightarrow (1-i)^{24} = [(1-i)^2]^{12} = (-2i)^{12} = 2^{12} \cdot (i^4)^3 = 2^{12} \in \mathbb{R}$.

2. Se impun condițiile $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ și $2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$, deci $x \in \mathbb{R} - \left\{ -1, \frac{1}{2} \right\}$.

$\frac{3x-1}{x+1} + \frac{x+1}{2x-1} = 3 \quad | \cdot (x+1)(2x-1) \Rightarrow (3x-1)(2x-1) + (x+1)^2 = 3(x+1)(2x-1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 6x^2 - 5x + 1 + x^2 + 2x + 1 = 3(2x^2 + x - 1) \Rightarrow 7x^2 - 3x + 2 = 6x^2 + 3x - 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$.

Am obținut astfel o ecuație de gradul al II-lea cu $a = 1$, $b = -6$, $c = 5$, $\Delta = b^2 - 4ac =$

$= (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 > 0$, deci ecuația admite rădăcinile reale distincte $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} =$

$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} = \frac{2(3 \pm 2)}{2} = 3 \pm 2$, deci $x_1 = 3 - 2 = 1$ și $x_2 = 3 + 2 = 5$.

În plus, observăm că $S = \{1, 5\} \subset \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.

3. Avem $e^x + 1 = y \Leftrightarrow e^x = y - 1 \Leftrightarrow x = \ln(y - 1)$, deci $f^{-1}(y) = x = \ln(y - 1)$ sau, folosind tot variabila x , avem $f^{-1}(x) = \ln(x - 1)$, unde $f^{-1} : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

4. Fie $A = \{10, 11, 12, \dots, 99\}$ mulțimea numerelor de două cifre. Observăm că $|A| = 99 - 9 = 90$.

Fie $A' = \{11, 22, \dots, 99\}$ mulțimea numerelor formate din două cifre egale. Observăm că

$|A'| = 9$ și că $A' \subset A$, ceea ce ne permite să scriem că $|A - A'| = |A| - |A'| = 90 - 9 = 81$. În

final, observăm că $B = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} \in A, a \neq b\} = A - A'$, deci $|B| = |A - A'| = 81$, de unde deducem

că probabilitatea căutată este $p = \frac{|B|}{|A|} = \frac{81}{90} = \frac{9}{10} = 0,9$.

5. Fie M mijlocul segmentului BC . Avem $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1$ și $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} =$

$= \frac{0 + 6}{2} = 3$, deci M are coordonatele $(x_M, y_M) = (1, 3)$. Lungimea medianei din A a triunghiului ABC este lungimea segmentului determinat de punctele $A(-2, -1)$ și $M(1, 3)$, deci

$$AM = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

6. Avem $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (m\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot [(m-2)\vec{i} - \vec{j}] = 0 \Leftrightarrow m(m-2) + 3 \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 2 = 0$. Am obținut astfel o ecuație de gradul al II-lea în necunoscuta m , cu $a = 1$,

$b = -2$, $c = -3$, deci $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$, adică ecuația admite rădăcinile

$$\text{reale distincte } m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \frac{2(1 \pm 2)}{2} = 1 \pm 2, \text{ de unde}$$

$m_1 = 1 - 2 = -1 \notin (0, \infty)$ și $m_2 = 1 + 2 = 3 > 0$. În concluzie, $m = 3$ este valoarea căutată.

Varianta 3

1. Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$.

2. Să se determine valoarea minimă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$.

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x-1) + \lg(6x-5) = 2$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(6, 4)$ și este perpendiculară pe dreapta $d : 2x - 3y + 1 = 0$.

6. Știind că $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2\alpha$.

Rezolvări

1. Avem $\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$, $\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^2} = \sqrt[12]{256}$, $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$.

Din $64 < 125 < 256 \Rightarrow \sqrt[12]{64} < \sqrt[12]{125} < \sqrt[12]{256}$, adică $\sqrt{2} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4}$.

2. Avem o funcție de gradul al II-lea cu $a = 4$, $b = -8$, $c = 1$, deci $\Delta = b^2 - 4ac =$

$= (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 48$. Deoarece $a = 4 > 0 \Rightarrow$ funcția f admite valoare minimă, respectiv

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{48}{4 \cdot 4} = -3.$$

3. Se impun condițiile $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in (1, \infty)$ și $6x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{6} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5}{6}, \infty\right)$,

deci $x \in (1, \infty) \cap \left(\frac{5}{6}, \infty\right) = (1, \infty)$. Avem $\lg(x-1) + \lg(6x-5) = 2 \Rightarrow \lg(x-1)(6x-5) = \lg 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(6x-5) = 100 \Rightarrow 6x^2 - 11x - 95 = 0$. Am obținut astfel o ecuație de gradul al II-lea cu

$a = 6$, $b = -11$ și $c = -95$, de unde rezultă că $\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-95) = 2401 =$

$= 49^2 > 0$, deci ecuația admite rădăcinile reale distincte $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11 \pm 49}{12}$, deci

$x_1 = \frac{11-49}{12} = -\frac{19}{6} \notin (1, \infty)$, respectiv $x_2 = \frac{11+49}{12} = 5 \in (1, \infty)$. În concluzie, ecuația admite soluția $x = 5$.

4. Fie $A = \{10, 11, \dots, 99\}$ mulțimea numerelor naturale de două cifre. Observăm că

$|A| = 99 - 9 = 90$. Fie $B = \{n \in A \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = k^2\}$. Observăm că $B = \{4^2, 5^2, \dots, 9^2\}$ și

$|B| = 9 - 3 = 6$, deci probabilitatea cerută este $p = \frac{|B|}{|A|} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$.

5. Observăm că $2x - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, deci $m = \frac{2}{3}$, unde $m = \text{panta}(d)$. Fie dreapta

d' care îndeplinește condițiile $d' \perp d$ și $A(6, 4) \in d'$. Avem $d' \perp d \Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m} = -\frac{3}{2}$, unde

$m' = \text{panta}(d')$. Din $A(6, 4) \in d' \Rightarrow d': y - y_A = m'(x - x_A) \Leftrightarrow y - 4 = -\frac{3}{2}(x - 6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(y - 4) + 3(x - 6) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 26 = 0$, deci ecuația dreptei căutate este

$d': 3x + 2y - 26 = 0$.

6. Avem $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

1. Să se arate că numărul $\left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}\right)^2$ este real.
2. Să se arate că vârful parabolei $y = x^2 + 5x + 1$ este situat în cadranul III.
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x - 10 \cdot 3^{x-1} + 1 = 0$.
4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.
5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ și $\vec{v} = -(5a-1)\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt perpendiculari.
6. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ascuțitunghic ABC, știind că $AB = 6$, $AC = 10$ și că aria triunghiului ABC este egală cu $15\sqrt{3}$.

Rezolvări

1. Avem $\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} = \frac{(1+i) - (1-i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$, deci $\left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}\right)^2 = i^2 = -1 \in \mathbb{R}$.
2. Avem $a = 1$, $b = 5$, $c = 1$, $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21$. Coordonatele vârfului V sunt $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2}$ și $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{21}{4}$. Evident $x_V < 0$ și $y_V < 0$, deci vârful V este situat în cadranul al III-lea.
3. Folosind notația $3^{x-1} = y$, $y > 0$, ecuația devine $9y^2 - 10y + 1 = 0$, cu soluțiile $y_1 = \frac{1}{9}$ și $y_2 = 1$. Revenind la notația $3^{x-1} = y$, obținem $3^{x-1} = \frac{1}{9} = 3^{-2} \Rightarrow x_1 = -1$, respectiv $3^{x-1} = 1 \Rightarrow x_2 = 1$. Deci $x \in \{-1, 1\}$.
4. Fie $A = \{100, 101, \dots, 999\}$ mulțimea numerelor naturale de trei cifre. Observăm că $|A| = 999 - 99 = 900$. Numele de trei cifre dintre care exact două cifre sunt egale sunt în una și numai una dintre formele posibile \overline{aab} , \overline{aba} sau \overline{baa} . Numerele de forma \overline{aab} sunt în $9 \cdot 9 = 81$ variante posibile, deoarece $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ poate fi ales în 9 moduri posibile, iar $b \in \{0, 1, \dots, 9\} - \{a\}$ poate fi ales și el în 9 moduri posibile. În mod similar, numerele de forma \overline{aba} sau \overline{baa} sunt fiecare în 81 de variante posibile, deci avem în total $3 \cdot 81 = 243$ numere de trei cifre având exact două cifre egale. Probabilitatea căutăată este $p = \frac{243}{900} = \frac{27}{100} = 0,27$.
5. Avem $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow [a\vec{i} + (a+1)\vec{j}] \cdot [-(5a-1)\vec{i} + 2\vec{j}] = 0 \Leftrightarrow -a(5a-1) + (a+1) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow -5a^2 + 3a + 2 = 0$, cu soluțiile $a_1 = -\frac{2}{5}$ și $a_2 = 1$, deci $a \in \left\{-\frac{2}{5}, 1\right\}$.

6. Avem $S[ABC] = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} \Rightarrow 15\sqrt{3} = \frac{6 \cdot 10 \cdot \sin A}{2} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m(\hat{A}) = 60^\circ$, deoarece, prin ipoteză, triunghiul ABC este ascuțitunghic. Conform Teoremei lui Pitagora generalizată, avem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow BC^2 = 76 \Rightarrow BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

Varianta 5

- Să se calculeze $\frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1-2i}$.
- Să se rezolve în \mathbb{Z} inecuația $x^2 - 10x + 12 \leq 0$.
- Să se determine inversa funcției bijective $f: (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = 3\log_2 x$.
- Să se determine numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ cu proprietatea că $f(1) = f(4)$.
- Să se determine coordonatele vârfului D al paralelogramului ABCD, dacă $A(-2, 9)$, $B(7, -4)$, $C(8, -3)$.
- Triunghiul ABC are $B = \frac{\pi}{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 1. Să se calculeze lungimea laturii AC.

Rezolvări

- Avem $\frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1-2i} = \frac{1-2i+1+2i}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2}{1-4i^2} = \frac{2}{5}$.
- Avem $a = 1$, $b = -10$, $c = 12$, $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 52$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{52}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 5 \pm \sqrt{13}$. Deoarece $3^2 = 9 < 13 < 16 = 4^2 \Rightarrow 3 < \sqrt{13} < 4$.
Din $3 < \sqrt{13} < 4 \mid +5 \Rightarrow 8 < 5 + \sqrt{13} < 9$.
Din $3 < \sqrt{13} < 4 \mid \cdot (-1) \Rightarrow -4 < -\sqrt{13} < -3 \mid +5 \Rightarrow 1 < 5 - \sqrt{13} < 2$. Avem $x \in \mathbb{Z}$ și $x^2 - 10x + 12 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [5 - \sqrt{13}, 5 + \sqrt{13}] \cap \mathbb{Z} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, deoarece, din inegalitățile $1 < 5 - \sqrt{13} < 2$ și $8 < 5 + \sqrt{13} < 9$, deducem că $[2, 8] \subset [5 - \sqrt{13}, 5 + \sqrt{13}] \subset [1, 9]$, incluziunile fiind stricte.
- Avem $3\log_2 x = y \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{y}{3} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{y}{3}}$, deci $f^{-1}(y) = x = 2^{\frac{y}{3}}$ sau, folosind tot variabila x , $f^{-1}(x) = 2^{\frac{x}{3}} = \sqrt[3]{2^x}$, unde $f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$.

4. Observăm că valoarea comună $f(1) = f(4) \in \{1, 2, 3, 4\}$ poate fi aleasă în 4 moduri posibile, iar valorile $f(2), f(3) \in \{1, 2, 3, 4\}$ pot fi alese fiecare în 4 moduri posibile, deci există $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ funcții care îndeplinesc condițiile cerute.

5. Fie M mijlocul diagonalei AC . Avem $x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2 + 8}{2} = 3$ și $y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{9 + (-3)}{2} = 3$.

$ABCD$ paralelogram dacă și numai dacă diagonalele AC și BD au același punct ca mijloc, deci $M(3, 3)$ este mijloc și pentru BD .

Avem $x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{7 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = -1$ și $y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{-4 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = 10$, deci coordonatele punctului D sunt $(x_D, y_D) = (-1, 10)$.

6. Conform teoremei sinusului, $AC = 2R \sin B = 2 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Varianta 6

- Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale de două cifre care se divid cu 11.
- Să se determine funcția f de gradul al doilea știind că $f(-1) = 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3$.
- Să se rezolve în mulțimea $(0, \pi)$ ecuația $\sin 3x = \sin x$.
- Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{2, 4, 6, 8\}$?
- Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile în $A(1, 2)$, $B(2, -2)$ și $C(4, 6)$. Să se calculeze $\cos B$.
- Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $C = \frac{\pi}{6}$ și $AB = 6$.

Rezolvări

1. $S = 11 + 22 + \dots + 99 = 11 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 11 \cdot \frac{(1+9) \cdot 9}{2} = 495$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a \in \mathbb{R}^*$ și $b, c \in \mathbb{R}$. Avem $f(-1) = 1 \Leftrightarrow a(-1)^2 + b(-1) + c = 1 \Leftrightarrow a - b + c = 1$, $f(0) = 1 \Leftrightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \Leftrightarrow c = 1$ și $f(1) = 3 \Leftrightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3 \Leftrightarrow a + b + c = 3$. Folosind faptul că avem $c = 1$, celelalte două relații devin $a - b = 0$ și $a + b = 2$, de unde deducem că $a = b = 1$, deci $f(x) = ax^2 + bx + c = 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 1 = x^2 + x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Avem $\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow \sin 3x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{3x-x}{2} \cos \frac{3x+x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos 2x = 0$,

deci $\sin x = 0 \Rightarrow x \in \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \cap (0, \pi) = \emptyset$, respectiv $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{4} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cap (0, \pi) = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

4. Fie $M = \{2, 4, 6, 8\}$. Observăm că $|M| = 4$, deci putem forma $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$ de numere cu trei cifre distincte alese dintre cifrele 2, 4, 6 sau 8.

5. Avem $AB = \sqrt{(1-2)^2 + [2-(-2)]^2} = \sqrt{17}$, $AC = \sqrt{(1-4)^2 + (2-6)^2} = 5$,

$BC = \sqrt{(2-4)^2 + (-2-6)^2} = 2\sqrt{17}$. Conform teoremei cosinusului, avem

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{17 + 68 - 25}{2\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{17}} = \frac{60}{4 \cdot 17} = \frac{15}{17}.$$

6. Conform teoremei sinusului, avem $2R = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow 2R = \frac{6}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} \Rightarrow R = 6$.

Varianta 7

1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{8+i}{7-4i}$.

2. Să se determine valoarea maximă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

3. Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\sin x = -\frac{1}{2}$.

4. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ are exact 120 de submulțimi cu două elemente.

5. Se știe că, în triunghiul ABC, vectorii $\overline{AB} + \overline{AC}$ și $\overline{AB} - \overline{AC}$ au același modul. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.

6. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC care are lungimile laturilor egale cu 3, 4 și 5.

Rezolvări

1. $|z| = \left| \frac{8+i}{7-4i} \right| = \frac{|8+i|}{|7-4i|} = \frac{\sqrt{8^2+1^2}}{\sqrt{7^2+(-4)^2}} = \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{65}} = 1$

2. Observăm că $f(x) = -x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2 \leq 0$, cu $f(3) = 0$, deci $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$.

$$3. \operatorname{Rsin} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left\{ (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0, 2\pi) = \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0, 2\pi) = \left\{ \frac{\pi}{6} + \pi, -\frac{\pi}{6} + 2\pi \right\} = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}.$$

4. Fie $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Avem $|M| = n$ și mulțimea M admite exact $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ submulțimi

cu două elemente. Din $C_n^2 = 120 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 120 \Rightarrow n^2 - n - 240 = 0$. Am obținut astfel o ecuație de gradul al II-lea cu $a = 1$, $b = -1$, $c = -240$, $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-240) = 961 = 31^2 > 0$, deci ecuația admite două rădăcini reale distincte $n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 31}{2}$,

adică $n_1 = \frac{1-31}{2} = -15 \notin \mathbb{N}$, respectiv $n_2 = \frac{1+31}{2} = 16 \in \mathbb{N}$ și $16 \geq 2$. În concluzie, $n = 16$.

5. $|\overline{AB} + \overline{AC}| = |\overline{AB} - \overline{AC}| \Rightarrow |\overline{AB} + \overline{AC}|^2 = |\overline{AB} - \overline{AC}|^2 \Rightarrow (\overline{AB} + \overline{AC})^2 = (\overline{AB} - \overline{AC})^2 \Rightarrow (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{AC} \Rightarrow$ triunghiul ABC este dreptunghic, cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$.

6. Observăm că $5^2 = 3^2 + 4^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic cu ipotenuza de lungime 5 și catetele de lungimi 3, respectiv 4. Avem $S[ABC] = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$. Pe de altă parte, avem

$S[ABC] = r \cdot p$, unde r este raza cercului înscris, iar $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6$ este semiperimetrul triunghiului. Obținem $6 = r \cdot 6 \Rightarrow r = 1$.

Varianta 8

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 = -4$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + x + c$. Știind că punctele $A(1, 2)$ și $B(0, 3)$ aparțin graficului funcției f , să se determine numerele reale a și c .

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{7x+1} - x = 1$.

4. Câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1, 3, 5, 7, 9\}$?

5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele E și F astfel încât $\overline{AE} = \overline{EB}$, $\overline{DF} = 2\overline{FE}$. Să se demonstreze că punctele A , F și C sunt coliniare.

6. Fie triunghiul ABC . Să se calculeze lungimea înălțimii corespunzătoare laturii BC știind că $AB = 13$, $AC = 14$ și $BC = 15$.